10/11/2020

Άσκηση 34: $\bar f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar x_0 \in U$, $\lim_{\bar x \to \bar x_0} \bar f(\bar x) = \bar 0 = \bar f(\bar x_0)$ και $\bar g: U \to \mathbb{R}^n$, φραγμένη,

δηλ. $\exists R>0: \bar g(U) \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ ($\Leftrightarrow \forall \bar x \in U: \|\bar g(\bar x)\| < R$)

(*) Ν.δ.ο. $(\bar f \cdot \bar g)(\bar x) := \bar f(\bar x) \cdot \bar g(\bar x)$, $\bar x \in U$ είναι συνεχές στο $\bar x_0$ δηλ. $\lim_{\bar x \to \bar x_0} (\bar f \cdot \bar g)(\bar x) = (\bar f \cdot \bar g)(\bar x_0) = \underbrace{\bar f(\bar x_0)}_{=\bar 0} \cdot \bar g(\bar x_0) = 0$

Δηλ. Ν.δ.ο.: $\forall (\bar x_\nu) \subset U$ με $\bar x_\nu \to \bar x_0$: $\underbrace{\bar f(\bar x_\nu) \cdot \bar g(\bar x_\nu)}_{\in \mathbb{R}} \to 0$

$\Leftrightarrow 0 \le |\bar f(\bar x_\nu) \cdot \bar g(\bar x_\nu)| \to 0$

Λύση:

Όμως $|\bar f(\bar x_\nu) \cdot \bar g(\bar x_\nu)| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \underbrace{\|\bar f(\bar x_\nu)\|}_{\xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \ (*)} \cdot \underbrace{\|\bar g(\bar x_\nu)\|}_{\le R} \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$ (μηδενική × φραγμένη)

(*) ισχύει αφού $\bar f(\bar x_\nu) \to \bar 0$ $\overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow}$ $\|\bar f(\bar x_\nu) - \bar 0\| = \|\bar f(\bar x_\nu)\| \to 0$

$\Updownarrow$

$[\lim_{\bar x \to \bar x_0} \bar f(\bar x) = \bar 0]$

Άσκηση 36: Ν.δ.ο.: $\{\bar x \in \mathbb{R}^n : \|\bar x\| = 1\}$ κλειστό

Λύση:

Έστω $\bar x_\nu \to \bar x \in \mathbb{R}^n$, όπου $\|\bar x_\nu\| = 1$. Ν.δ.ο.: $\|\bar x\| = 1$

Όμως η απεικόνιση $\bar x \mapsto \|\bar x\|$ είναι συνεχής (στο π.ο. $\mathbb{R}^n$) [αφού $\bar x_\nu \to \bar x$, τότε $\Leftrightarrow \|\bar x_\nu - \bar x\| \to 0$ και $0 \le |\,\|\bar x_\nu\| - \|\bar x\|\,| \le \underbrace{\|\bar x_\nu - \bar x\|}_{\to 0} \Rightarrow \|\bar x_\nu\| \to \|\bar x\|$]

Άρα, εδώ $\bar x_\nu \to \bar x \Rightarrow \underbrace{\|\bar x_\nu\|}_{=1} \to \underbrace{\|\bar x\|}_{=1}$

Κεφάλαιο 3 (Συν.) Διαφόριση

3.1. Μερικές παράγωγοι

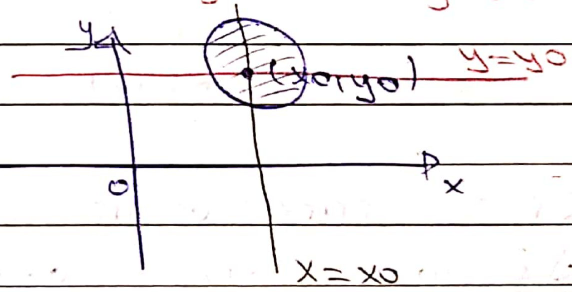
Παράδειγμα: $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in U$ τυχαίο αλλά σταθερό. Τότε η μερική παράγωγος (πρώτης τάξης) της f ως προς x στο σημείο (x_0,y_0) είναι:

μένει σταθερό $= y_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} =: f_1'(x)$$

για $f_1 : (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = f(x,y_0)$

Άρα η $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ υπολογίζεται ως παράγωγος της συνάρτησης $x \mapsto f(x,y_0)$ στο σημείο x_0 (δηλ. κρατώντας το y_0 σταθερό) με άλλα λόγια η μερική παράγωγος ως προς μία μεταβλητή είναι η παράγωγος της συνάρτησης της μεταβλητής αυτής, θεωρώντας ότι όλες οι άλλες μεταβλητές είναι σταθερές και διατηρούν τη τιμή που έχουν στο σημείο όπου εξετάζω τη μερική παράγωγο

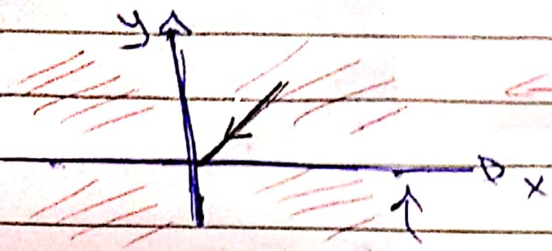


Σχόλιο: Έστω $U=\mathbb{R}^2$ και $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Για να υπολογίσω το $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ περιορίζω την f στην ευθεία $\{x=x_0\}$ και υπολογίζω την παράγωγο της $f(x_0,y)$ στο σημείο $y=y_0$ πραγματική συνάρτηση της μιας (!) πραγματικής μεταβλητής $y \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα για $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

Παράδειγμα: Για την περιορισμένη πληροφορία που δίνουν οι μερικές παράγωγοι ("σημειακά")

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } xy = 0 \\ 0, & \text{αν } xy \neq 0 \end{cases}$



Εδώ η f έχει τιμή = 0

Εδώ η f έχει τιμή = 1

Τότε: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

και:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Παρόλα αυτά η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ (*)

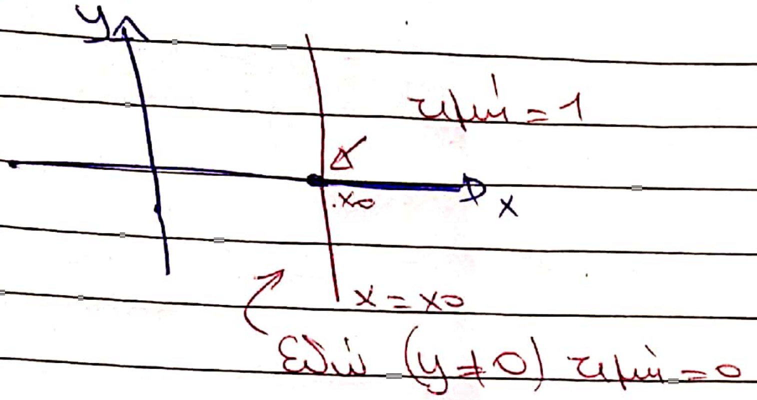
(*) π.χ. $f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\nu}, \tfrac{1}{\nu}}_{\to (0,0)}\Big) = 0 \to 0 \neq 1 = f(0,0)$

Επίσης, παρατηρούμε ότι για $x_0 \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0$ ενώ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} \nexists \text{ διότι}$$

$\underset{(h \neq 0)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \nexists$ και ανάλογα για $(0,y_0)$ με $y_0 \neq 0$



Προσοχή!!! Η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο **δεν** σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Είναι απλώς μερικώς διαφορίσιμη.

Σημαντικό (κατα) παράδειγμα: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$

Σ όπως είδαμε η f είναι συνεχής: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \Rightarrow 0 \leq \big|\, \|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}_0\| \,\big| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$
$\Rightarrow \|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}_0\|$. Είναι μερικώς διαφορίσιμη? Σε ποια σημεία?

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + (x_i + h)^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 =$$

$$= \frac{d}{dx_i}\sqrt{x_i^2 + \underbrace{c^2}_{= \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_j^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_i^2 + c^2}}\, 2x_i \overset{x_i^2 + c^2 \neq 0}{=} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + c^2}} = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$$